Capítulo 1

Demostración de la ortogonalidad de los vectores de polarización.

Abstracto.

Nota: *para las personas que no están familiarizadas con papers pueden saltarse esta sección, ya que normalmente es un resumen en profundidad del contenido del mismo y puede ser confuso si no tienen idea de lo que se habla. (y por cierto no tengan terror no hay mas de un capitulo haha)*

Se va a describir de forma intuitiva la ortogonalidad de los vectores de polarización, definidos como vectores base de una variedad lorenziana en 4D (y en principio en D dimensiones, pero este no es el tema en si a demostrar).

1.1. Introducción

Bueno como ya habran visto en el capitulo 65 de TCC (Teoria Cuantica de Campos), Javier muestra la existencia de unos nuevos componentes del campo A_μ (el potecial electromagnetico) que son los vectores de polarización ϵ_μ^a estos vectores son los que describen que tan distorcionado estan las direcciones transversales (las que son ortogonales al vector κ_μ).

Pues bien Javier mostro interés total en demostrar una ecuación muy en concreto la cual es la que define la ortogonalidad de los vectores de la polarización la cual es esta de aquí:

$$\sum_{a=0}^{4} \xi_a \epsilon_\mu^a \epsilon_\nu^a = g_{\mu\nu}$$

Y es importante tener esta ecuación en mente porque permite definir la metrica a partir de los vectores de polarización(por qué? te preguntarias bueno eso no lo responderia porque este no es el proposito de este articulo y porque dentro de no mucho tiempo(o eso entiendo) javier puede que saque el capitulo que haga enterder sus ansias de demostrar esto), entonces como demostramos algo que luce no tener origen?(aunque mas que no tener origen, mas bien es una imposición con lo cual la forma de ver esto es como una elección para que cada vector preserve la fisica de la forma que queremos) pues bien esto lo voy a hacer de forma generica para cualquier posible valor de los vectores(reales y complejos) y para demostrarlo creo es decente cambiar la notación y un poco el contexto para que se vea como toma sentido todo...

Nota importante:*lo normal es definir todo en una abstración matematica pero como Javier diria somos fisicos no matematicos, asi que para no llenar la pantalla de fondo matematico y llevarlo a lo abstracto lo bueno seria describir todo a mano asi que como parte del lector es importante e indispensable no perderse nada y leer todo con calma.*

1.2. Cambio de notación y demostración en los numeros reales

Aqui haremos un cambio de notación y cambiaremos $\epsilon^a_\mu \to e^a_\mu$ por qué? bueno eso si es una pregunta que puedo responder con certeza pero creo que dar la respuesta de golpe seria confuso pero para los que cursaron relatividad ya habran abierto los ojos y esto es porque si nos salimos del contexto de que hablamos de los vectores de polarización y decimos que son unos vectores base de un espacio vectorial(y no cualquiera si no uno que nos permita definir una metrica a partir de sus productos escalares y por ende es como si hablaramos de una variedad(un ejemplo de esto es $\eta_{\mu\nu}$ siendo la metrica del espaciotiempo de minkowski que es una variedad plana)), con lo cual que pasa si ahora re escribimos en terminos de la notacion de Einstein? bueno primero hay justificar la eliminacion de ξ_a , por qué? porque esto corresponde con la signatura de relatividad especial(-1, 1, 1, 1 ó 1, -1, -1, -1) lo cual si ahora estamos en el espaciotiempo el hecho de que exista esto se vuelve inecesario debido que todos los vectores en el espaciotiempo traen esa signatura al hacer multiplicación escalar con lo cual en este cambio de notacion ξ_a desaparece simplificando ligeramente la ecuacion, y ahora si tomaremos la ecuacion y la pasaremos a notacion relativista de Einstein:

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e_{\nu a}$$

Bueno como ven es calcada a la ecuacion de la metrica pero trae nuevos indices (para los que saben relatividad solo de parte de Javier, pero no hay que temer ya que esto no cambia el fondo real del asunto ya que esos indices vienen a ser los indices vectoriales de los vectores base y esta forma de ver los vectores se les dice tetrad, por si les interesa investigar), perfecto ya que si ahora hablamos de un producto escalar debe ser por fuerza invariante lorenz(salvo que los que el vector trasforme de dos formas completamente diferente al mismo cosa que no tiene sentido) con lo cual sin ecuaciones hemos demostrado que la ecuacion es invariante lorenz en una especie de "nuevo espaciotiempo"donde los vectores de la base e^a_μ cumplen $e^a_\mu \kappa^\mu = 0$ esto para que preserve la fisica en el mundo real.

Como pequeño comentario solo como curiosidad este espaciotiempo le podemos poner el nombre de espacio de polarizaciones, por que? porque al estar descrito por los vectores de polarizaciones como base, todos los posibles vectores en este espacio son posibles polarizaciones de la solucion del campo A_μ...

1.3. Demostración en variedades complejas

Bueno esta sección sera mucho mas corta, solo tengo que mostrar algo que nunca se toma en cuenta a no ser que vayas a estudiar geometria diferencial en avanzado pero lo aqui lo hare resumidamente y yendo mas al grano, que pasa si hacemos que los vectores del espacio de polarizaciones les permitimos que puedan tomar valores imaginarios o mejor complejos? Bueno ya habria mas de uno borrando el archivo y diciendo "que locura!"pero aqui se entendera mejor las razones de porque tambien tiene sentido.

Entonces, para empezar quiero aclarar que la metrica tiene el rol de definir las distancias en cualquier variedad con lo cual su valor no puede ser imaginario ni complejo (al menos la que si nos permite definir la variedad), bueno este comentario no cambia nada la situación pero si ayuda a encontarla pues que tal si hacemos que por regla(o definicion) cada valor de la metrica sea el modulo de cada vector complejo (lo cual cae al anillo al dedo porque ahora es como si midieramos cada distancia en cada plano complejo que le corresponde a cada coordenada del espacio y luego sumamos) lo cual la ecuacion luciria asi:

$$g_{\mu\nu} = (e^a_\mu)^\dagger e_{\nu a}$$

Donde $\dagger$ es el operador daga (pero como curiosidad su nombre original en griego es obelisko) y lo que hace es trasponer el vector y luego conjugarlo lo cual ahí obtenemos el modulo de los vectores base, el hecho de que estos vectores sean complejos no cambia la estructura en la que transforman ni hay nada en especial(ademas de que las distancias se preservan al transformarla usando lorenz con lo cual siempre que la metrica o la ecuación de la metrica aparezca como lo hace en esta ecuación de forma intrinceca ya hablamos de algo invariante lorenz).

1.4. Conclución

Como buen resumen en este articulo solucionamos un problema propuesto por Javier en el capitulo 65, el cual es demostrar la ortogonalidad de los vectores de polarizacion de forma generica para cualquier valor en los numeros complejos y dar con la clave, yo para llegar a la resolucion he decidido darle un toque especial para que se vea como todo cobra sentido y demostramos esta ecuación ser invariante lorenz sin dar rodeos en como transforma cada cosa si no viendo que es cada cosa y que significado tienen y de ahi ya saber la respuesta del problema, el hecho de definir ese espacio de polarizaciones hace muchisimas cosas sean mas visibles pero creo que no es objeto de estudio ahora mismo, al extender esto a los numeros complejos ya la variedad es otra cosa a definir y realmente lo que correspoderia seria decir que es eso (aunque no sea de interes aqui ahora mismo), pues este nuevo objeto se llama variedades de Kähler por si alguien le interesa estudiarlo, yo para concluir dire que demostrar esto solo necesitaba otro punto de vista que lo haga ver con claridad.